

SISTEMI DI NUMERAZIONE

1. Introduzione

Un sistema di numerazione è un modello matematico che consente di rappresentare i numeri mediante un insieme di simboli, detti **cifre**.

In questa unità e nel resto del volume verranno considerati solo sistemi di numerazione di tipo posizionale, in cui le cifre hanno “pesi” che dipendono dalla loro posizione all’interno del numero di cui fanno parte.

Un concetto di fondamentale importanza nei sistemi di numerazione posizionali è la **base**, cioè il numero delle cifre costituenti il sistema di numerazione considerato, la quale esprime quante volte in più vale la stessa cifra man mano che occupa posizioni sempre più a sinistra all’interno di un numero.

Nel sistema di numerazione decimale (10 cifre) ogni cifra assume un valore 10 volte maggiore rispetto alla precedente, spostandosi da destra verso sinistra.

Ad esempio, nel numero 44 la cifra 4 che si trova a sinistra ha un peso 10 volte maggiore (40) di quella di destra (4).

2. Sistema numerico decimale

È un sistema numerico posizionale a base 10 in quanto, per rappresentare i numeri, utilizza 10 cifre: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Un numero decimale viene rappresentato con la notazione:

$$(515)_{10}$$

in cui il pedice 10 indica che il numero tra parentesi è in forma decimale.

Essendo posizionale, il sistema numerico decimale consente di esprimere un qualsiasi numero come somma di potenze del 10; ad esempio, il numero intero $(515)_{10}$ può essere così scritto:

$$(515)_{10} = 500 + 10 + 5$$

ovvero:

$$(515)_{10} = 5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

in cui la prima cifra a partire da destra (che rappresenta le unità) è detta **meno significativa** o **di minor peso** e quella più a sinistra (che rappresenta le centinaia) è detta **più significativa** o **di maggior peso**.

Dalla precedente espressione appare evidente che nel sistema decimale, e più ingenerale in un qualsiasi sistema posizionale avente base b , una cifra c all’interno di un numero assume un valore v che dipende dalla posizione p secondo l’equazione:

$$v = c \cdot b^p [A.2.1]$$

dove p inizia da 0 e aumenta di una unità per ogni posizione da destra verso sinistra.

Nell’esempio precedente, essendo $b = 10$, nel caso di $p = 1$ si ha $v = 1 \cdot 10^1 = 10$.

Le considerazioni relative ai numeri decimali interi sono valide anche per quelli decimali frazionari, tenendo presente che le cifre decimali dopo la virgola devono essere moltiplicate per le potenze negative del 10 crescenti.

Ad esempio, il numero decimale frazionario $(341,23)_{10}$ può essere così scritto:

$$(341,23)_{10} = 300 + 40 + 1 + 0,2 + 0,03 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$$

3. Sistema numerico binario

Per rappresentare una qualsiasi informazione mediante numeri, lettere e caratteri sono sufficienti due soli simboli: ad esempio, l’alfabeto Morse, sviluppato nella seconda metà del 1800 per la trasmissione telegrafica, è basato sui simboli “punto” e “linea”, tramite i quali, mediante opportune combinazioni, si possono rappresentare tutte le lettere dell’alfabeto e le cifre del sistema numerico adottato (decimale).

Proprio su tale principio si basa il funzionamento dei calcolatori, costituiti da un insieme di componenti elettronici elementari che possono assumere solo due stati: ad esempio, un diodo conduce o non conduce, un anello di materiale ferromagnetico è magnetizzato in un verso o in quello opposto, un interruttore è aperto o chiuso.

Indicando convenzionalmente i due possibili stati con le cifre 0 e 1, è allora possibile memorizzare, e quindi elaborare, qualsiasi informazione mediante combinazioni di 0 e di 1; per tale ragione nei calcolatori è stato adottato un sistema numerico posizionale a base 2, detto **binario**, in cui le cifre 0 e 1 sono denominate **bit**, abbreviazione di **binary digit** (cifra binaria).

Analogamente a un numero decimale, un numero binario è rappresentato con la notazione:

$$(1001)_2$$

in cui il pedice 2 indica che il numero tra parentesi è di tipo binario.

Iniziando a contare da 0, dopo aver contato 0 e 1, il «due», che nel sistema binario non esiste, viene rappresentato con la notazione $(10)_2$, cioè con due cifre.

Proseguendo il conteggio ad esempio fino a 7 si ha:

$$000 - 001 - 010 - 011 - 100 - 101 - 110 - 111$$

Analogamente al sistema decimale, un numero binario può essere rappresentato come somma di potenze del 2, ciascuna delle quali moltiplicata per il corrispondente bit, che può essere 0 o 1.

Ad esempio i numeri binari $(10101)_2$ e $(1011,11)_2$ possono essere scritti come:

$$\begin{aligned} (10101)_2 &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ (1011,11)_2 &= 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} \end{aligned}$$

E quindi si ha:

$$(10101)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 0 + 4 + 0 + 1 = (21)_{10}$$

$$(1011,11) = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 8 + 0 + 2 + 1 + 0,5 + 0,25 = (11,75)_{10}$$

Le due espressioni precedenti costituiscono un esempio di **conversione binario-decimale**.

Esempio 1

Convertire in decimale il numero $(1111)_2$.

Soluzione

$$(1111)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = (15)_{10}$$

Esempio 2

Convertire in decimale il numero $(1111,01)_2$.

Soluzione

$$(111,01)_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 4 + 2 + \frac{0}{2} + \frac{1}{4} = (7,25)_{10}$$

Conversione decimale-binario

La metodologia più utilizzata per effettuare la conversione **decimale-binario** prevede la divisione ripetuta per 2 fino ad ottenere un quoziente nullo: il numero binario risultante è composto dai resti delle successive divisioni, dove il bit meno significativo è il resto della prima divisione e il bit più significativo quello dell'ultima.

Ad esempio per convertire in forma binaria il numero $(23)_{10}$ si procede come segue:

$$\begin{array}{rclcl} \frac{23}{2} = & 11 & + & 1 & \longleftarrow \text{bit meno significativo} \\ \frac{11}{2} = & 5 & + & 1 & \\ \frac{5}{2} = & 2 & + & 1 & \\ \frac{2}{2} = & 1 & + & 0 & \\ \frac{1}{2} = & 0 & + & 1 & \longleftarrow \text{bit più significativo} \\ & \text{quoziente} & & \text{resto} & \\ & & & \longrightarrow & (23)_{10} = (10111)_2 \end{array}$$

Si può facilmente verificare che riconvertendo il numero binario $(10111)_2$ in decimale si ottiene di nuovo $(23)_{10}$. Si ha infatti:

$$(10111)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 0 + 4 + 2 + 1 = (23)_{10}$$

Esempio 3

Convertire in binario il numero $(15)_{10}$.

Soluzione

$$\begin{array}{rclcl} \frac{15}{2} = & 7 & + & 1 & \longleftarrow \text{bit meno significativo} \\ \frac{7}{2} = & 3 & + & 1 & \\ \frac{3}{2} = & 1 & + & 1 & \\ \frac{1}{2} = & 0 & + & 1 & \longleftarrow \text{bit più significativo} \\ & \text{quoziente} & & \text{resto} & \\ & & & \longrightarrow & (15)_{10} = (1111)_2 \end{array}$$

Esempio 4

Convertire in binario il numero $(16)_{10}$.

Soluzione

$$\begin{array}{rclcl}
 \frac{16}{2} = & 8 & + & 0 & \longleftarrow \text{bit meno significativo} \\
 \frac{8}{2} = & 4 & + & 0 & \\
 \frac{4}{2} = & 2 & + & 0 & \\
 \frac{2}{2} = & 1 & + & 0 & \\
 \frac{1}{2} = & 0 & + & 1 & \longleftarrow \text{bit più significativo} \\
 & \text{quoziente} & & \text{resto} & \\
 & & & \longmapsto & (16)_{10} = (10000)_2
 \end{array}$$

4. Sistema numerico ottale

È un sistema numerico a base 8, poiché i numeri sono rappresentati con 8 cifre: 0,1,2,3,4,5,6,7.

Essendo anch'esso posizionale, valgono tutte le considerazioni e i risultati dei sistemi decimale e binario.

Un numero ottale è pertanto rappresentato con la notazione:

$$(345)_8$$

in cui il pedice 8 indica la forma ottale del numero tra parentesi.

Un numero ottale può quindi essere espresso dalla somma di potenze dell'otto ciascuna moltiplicata per la corrispondente cifra.

Ad esempio, il numero $(127)_8$ può essere così scritto:

$$(127)_8 = 1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0$$

ovvero:

$$(127)_8 = 64 + 16 + 7 = (87)_{10}$$

Esempio 5

Convertire in decimale il numero $(212)_8$

Soluzione

$$(212)_8 = 2 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 = 2 \cdot 64 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 1 = (138)_{10}$$

Esempio 6

Convertire in decimale il numero $(1000)_8$

Soluzione

$$(1000)_8 = 1 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^0 = 1 \cdot 512 + 0 \cdot 64 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 1 = (512)_{10}$$

Conversione decimale-ottale

Per effettuare la **conversione decimale-ottale** si può utilizzare la stessa metodologia relativa alla conversione decimale-binario.

Ad esempio, per convertire in forma ottale il numero $(177)_{10}$ si procede come segue:

$$\begin{array}{rclcl}
 \frac{177}{8} = & 22 & + & 1 & \longleftarrow \text{cifra meno significativa} \\
 \frac{22}{8} = & 2 & + & 6 & \\
 \frac{2}{8} = & 0 & + & 2 & \longleftarrow \text{cifra più significativa} \\
 & \text{quoziente} & & \text{resto} & \\
 & & & \longmapsto & (177)_{10} = (261)_8
 \end{array}$$

Esempio 7Convertire in ottale il numero $(288)_{10}$

Soluzione

$$\begin{array}{rclcl}
 \frac{288}{8} = & 36 & + & 0 & \leftarrow \text{cifra meno significativa} \\
 \frac{36}{8} = & 4 & + & 4 & \\
 \frac{4}{8} = & 0 & + & 4 & \leftarrow \text{cifra più significativa} \\
 & \text{quoziente} & & \text{resto} & \\
 & & & \text{L} \rightarrow & (288)_{10} = (440)_8
 \end{array}$$

Esempio 8Convertire in ottale il numero $(122)_{10}$

Soluzione

$$\begin{array}{rclcl}
 \frac{122}{8} = & 15 & + & 2 & \leftarrow \text{cifra meno significativa} \\
 \frac{15}{8} = & 1 & + & 7 & \\
 \frac{1}{8} = & 0 & + & 1 & \leftarrow \text{cifra più significativa} \\
 & \text{quoziente} & & \text{resto} & \\
 & & & \text{L} \rightarrow & (122)_{10} = (172)_8
 \end{array}$$

Conversione binario-ottale

Per convertire un numero binario in ottale, prima si suddividono i bit in gruppi di tre, iniziando da destra e poi si sostituiscono tali gruppi con le corrispondenti cifre ottali, tenendo presente che, se l'ultimo gruppo a sinistra non contiene tre bit, quelli mancanti sono assunti pari a 0.

Ad esempio, per convertire in forma ottale il numero binario $(10001)_2$ si procede come segue:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \text{Suddivisione} & \text{L'ultimo bit} & \text{Sostituzione} & & & \\
 & \text{in gruppi di} & \text{mancante è} & \text{cifre} & & & \\
 & \text{tre bit} & \text{assunto a "0"} & \text{ottali} & & & \\
 (10001)_2 \rightarrow & 11.001 & \rightarrow 011.001 & \rightarrow 011.001 = (31)_0 & & & \\
 & & & \downarrow \downarrow & & & \\
 & & & 3 \quad 1 & & & \\
 & & & \uparrow \uparrow & & & \\
 & & & \text{cifra più significativa} & \text{cifra meno significativa} & &
 \end{array}$$

Esempio 9Convertire in ottale il numero $(11011)_2$

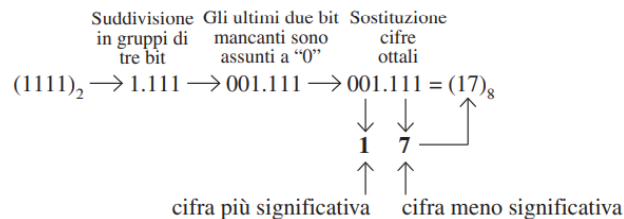
Soluzione

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \text{Suddivisione} & \text{L'ultimo bit} & \text{Sostituzione} & & & \\
 & \text{in gruppi di} & \text{mancante è} & \text{cifre} & & & \\
 & \text{tre bit} & \text{assunto a "0"} & \text{ottali} & & & \\
 (11011)_2 \rightarrow & 11.011 & \rightarrow 011.011 & \rightarrow 011.011 = (33)_8 & & & \\
 & & & \downarrow \downarrow & & & \\
 & & & 3 \quad 3 & & & \\
 & & & \uparrow \uparrow & & & \\
 & & & \text{cifra più significativa} & \text{cifra meno significativa} & &
 \end{array}$$

Esempio 10

Convertire in ottale il numero $(1111)_2$

Soluzione

**Conversione ottale-binario**

Tenendo conto di quanto visto nel precedente paragrafo, la conversione di un numero ottale in binario è immediata, in quanto basta sostituire ad ogni cifra ottale la corrispondente in binario a tre bit.

Ad esempio per convertire il numero ottale $(23)_8$ in binario si procede come segue:

$$\begin{array}{ccc}
 (2 & 3)_8 & = (010011)_2 \\
 \downarrow & \downarrow & \uparrow \\
 010 & 011 &
 \end{array}$$

Esempio 11

Convertire in binario il numero $(33)_8$

Soluzione

$$\begin{array}{ccc}
 (3 & 3)_8 & = (011011)_2 \\
 \downarrow & \downarrow & \uparrow \\
 011 & 011 &
 \end{array}$$

Esempio 12

Convertire in binario il numero $(121)_8$

Soluzione

$$\begin{array}{ccc}
 (1 & 2 & 1)_8 & = (001010001)_2 \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \uparrow \\
 001 & 010 & 001 &
 \end{array}$$

5. Sistema numerico esadecimale

È un sistema numerico posizionale a base 16, in cui per rappresentare un numero sono necessarie 16 cifre: le cifre 0,1,2,3...,9 e le prime sei lettere dell'alfabeto (da A,B,C,D,E,F). Le 16 cifre del sistema esadecimale sono pertanto:

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

che corrispondono ai primi sedici numeri decimali.

Anche in questo caso sono valide le considerazioni viste per gli altri sistemi (decimale, binario, ottale).

Un numero esadecimale viene pertanto rappresentato con la notazione:

$$(345)_{16}$$

in cui il pedice 16 indica la forma esadecimale del numero tra parentesi.

Un numero esadecimale può quindi essere espresso come somma di potenze del 16, ciascuna moltiplicata per la corrispondente cifra.

Ad esempio, il numero $(1BC)_{16}$ può essere scritto come:

$$(1BC)_{16} = 1 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0$$

ovvero:

$$(1BC)_{16} = 256 + 176 + 12 = (444)_{10}$$

Esempio 13

Convertire in decimale il numero $(FFF)_{16}$

Soluzione

$$(FFF)_{16} = 15 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 15 \cdot 256 + 15 \cdot 16 + 15 \cdot 1 = (4095)_{10}$$

Esempio 14

Convertire in decimale il numero $(123)_{16}$

Soluzione

$$(123)_{16} = 1 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 = 256 + 32 + 3 = (291)_{10}$$

Conversione decimale-esadecimale

Per la **conversione decimale-esadecimale** valgono le stesse considerazioni viste per le conversioni decimale-binario e decimale-ottale.

Ad esempio, per convertire in esadecimale il numero $(177)_{10}$, si procede come segue:

$$\begin{array}{rclcl} \frac{177}{16} = & 11 & + & 1 & \leftarrow \text{cifra meno significativa} \\ \frac{11}{16} = & 0 & + & 11 = B & \leftarrow \text{cifra pi\`u significativa} \\ & \text{quoziente} & & \text{resto} & \\ & & & \downarrow & \\ & & & & \rightarrow (177)_{10} = (B1)_{16} \end{array}$$

Esempio 15

Convertire in esadecimale il numero $(32)_{10}$

Soluzione

$$\begin{array}{rclcl} \frac{32}{16} = & 2 & + & 0 & \leftarrow \text{cifra meno significativa} \\ \frac{2}{16} = & 0 & + & 2 & \leftarrow \text{cifra pi\`u significativa} \\ & \text{quoziente} & & \text{resto} & \\ & & & \downarrow & \\ & & & & \rightarrow (32)_{10} = (20)_{16} \end{array}$$

Esempio 16

Convertire in esadecimale il numero $(53)_{10}$

Soluzione

$$\begin{array}{rclcl} \frac{53}{16} = & 3 & + & 5 & \leftarrow \text{cifra meno significativa} \\ \frac{3}{16} = & 0 & + & 3 & \leftarrow \text{cifra pi\`u significativa} \\ & \text{quoziente} & & \text{resto} & \\ & & & \downarrow & \\ & & & & \rightarrow (53)_{10} = (35)_{16} \end{array}$$

Conversione binario-esadecimale

Anche in questo caso valgono le stesse regole della conversione binario-ottale, tenendo per\`o presente che occorre dividere i numeri binari in gruppi da quattro bit.

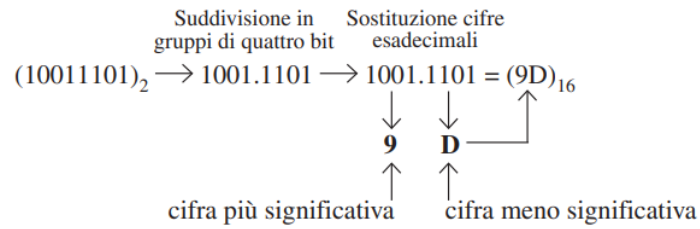
Ad esempio, per convertire in forma binaria il numero $(100010101)_2$ si procede come segue:

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{Suddivisione in} & \text{Gli ultimi tre bit mancanti} & \text{Sostituzione cifre} & & & \\ & \text{gruppi di quattro bit} & \text{sono assunti a "0"} & \text{esadecimali} & & & \\ & \downarrow & \downarrow & & & & \\ (100010101)_2 & \rightarrow 1.0001.0101 & \rightarrow 0001.0001.0101 & \rightarrow 0001.0001.0101 = (115)_{16} & & & \\ & & & \downarrow \downarrow \downarrow & & & \\ & & & \mathbf{1} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{5} & & & \\ & & & \uparrow \uparrow \uparrow & & & \\ & & & \text{cifra pi\`u significativa} & & \text{cifra meno} & \\ & & & & & \text{significativa} & \end{array}$$

Esempio 17

Convertire in esadecimale il numero $(10011101)_2$

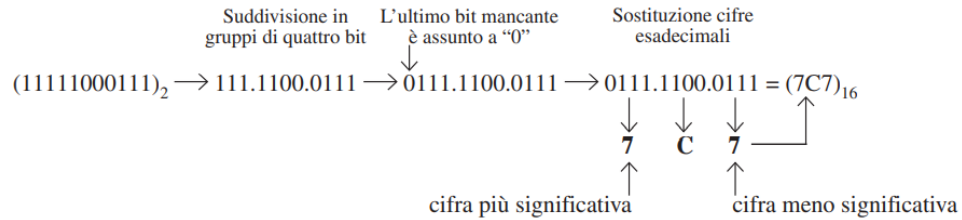
Soluzione



Esempio 18

Convertire in esadecimale il numero $(11111000111)_2$

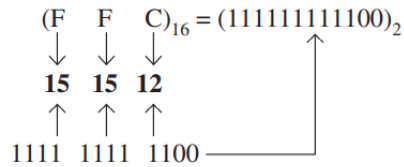
Soluzione



Conversione esadecimale–binario

Tenendo conto di quanto visto nel precedente paragrafo, la **conversione esadecimale-binario** è immediata, in quanto basta sostituire ad ogni cifra i quattro bit corrispondenti.

Ad esempio per convertire il numero esadecimale $(FFC)_{16}$ in binario si procede come segue:



Nella tabella 1 sono infine indicate le conversioni nei sistemi binario, ottale e esadecimale dei primi 32 numeri interi.

Tabella 1 – Conversione nei sistemi binario, ottale e esadecimale dei primi 32 numeri decimali interi

Decimale	Binario	Ottale	Esadecimale
0	0	0	0
1	01	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14
21	10101	25	15
22	10110	26	16
23	10111	27	17
24	11000	30	18
25	11001	31	19
26	11010	32	1A
27	11011	33	1B
28	11100	34	1C
29	11101	35	1D
30	11110	36	1E
31	11111	37	1F

Esempio 19

Convertire in binario il numero $(FFF)_{16}$

Soluzione

$$\begin{array}{ccccc}
 (F & F & F)_{16} & = & (111111111111)_2 \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \uparrow \\
 15 & 15 & 15 & & \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 1111 & 1111 & 1111 & \text{---} &
 \end{array}$$

Esempio 20

Convertire in binario il numero $(3A5)_{16}$

Soluzione

$$\begin{array}{ccccc}
 (3 & A & 5)_{16} & = & (001110100101)_2 \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \uparrow \\
 3 & 10 & 5 & & \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 0011 & 1010 & 0101 & \text{---} &
 \end{array}$$